HPC-Phys 勉強会, 2019/08/26

宇宙物理に現れる非線形偏微分方程式の解法について

大川博督(早大高等研)

1. Fujisawa, Okawa, Yamamoto, Yamada, AstroPhys.J. 872, 155(2019)
2. Okawa, Fujisawa, Yamamoto, Hirai, Yasutake, Nagakura, Yamada, arXiv/cs:1809.04495
3. Okawa, Fujisawa, Yasutake, Yamamoto, Ogata, Yamada in prep.

導入のための導入

自己紹介 (主な研究歴)

- 高次元時空（４以上）における数値相対論 (京大基研: 2012 年以前)
  - アインシュタイン方程式
- ブラックホールや超コンパクト星（アクシオン等）への重力崩壊など (リスボン工科大学: 2014 年頃まで)
  - アインシュタイン方程式、クライン=ゴルドン方程式
- サブ課題　宇宙 B　数値相対論班として SACRA コード整備 (京大&早大: 2016 年頃まで)
  - アインシュタイン方程式、完全流体の方程式
- サブ課題　宇宙 B　超新星ボルツマン班として「京」による大規模数値計算 (京大&早大: 現在も)
  - 輻射流体の方程式、ボルツマン方程式
- “W4 法” による非線形偏微分方程式の解法の構築 (早大高等研: これから)

偏微分方程式の型について

・2変数2階偏微分方程式の型

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x)=0$$

1. 双曲型 $(B^2-AC>0)$ (例) 波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2. 放物型 $(B^2-AC=0)$ (例) 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3. 楕円型 $(B^2-AC<0)$ (例) ポアソン方程式 $\triangle\psi=4\pi G\rho$

一般的な数値計算コスト $(1<2<3)$

マクスウェル方程式やアインシュタイン方程式: 双曲型＋楕円型
(発展方程式＋拘束条件)

宇宙物理における楕円型偏微分方程式の例

- Hamiltonian and Momentum constraints(相対論的初期条件)

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\psi - \frac{1}{8}\psi\tilde{R} - \frac{1}{12}\psi^5 K^2 + \frac{1}{8}\psi^{-7}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} &= -\frac{\kappa}{8}\psi^5\rho, \\ \tilde{\Delta}W_i + \frac{1}{3}\tilde{\nabla}_i\left(\tilde{\nabla}_j W^j\right) + \tilde{R}_{ij}W^j &= \frac{2}{3}\psi^6\tilde{\nabla}_i K + \kappa\psi^{10} j_i.\end{aligned}$$

- Apparent Horizon Finder(ホライズン面の探査)

$$h_{,\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}h_{,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}h_{,\phi\phi} = S(h).$$

- Part of Shrödinger equation with potential(モード解析)

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}r^2} + \left(\omega^2 - V\right)\Psi = 0.$$

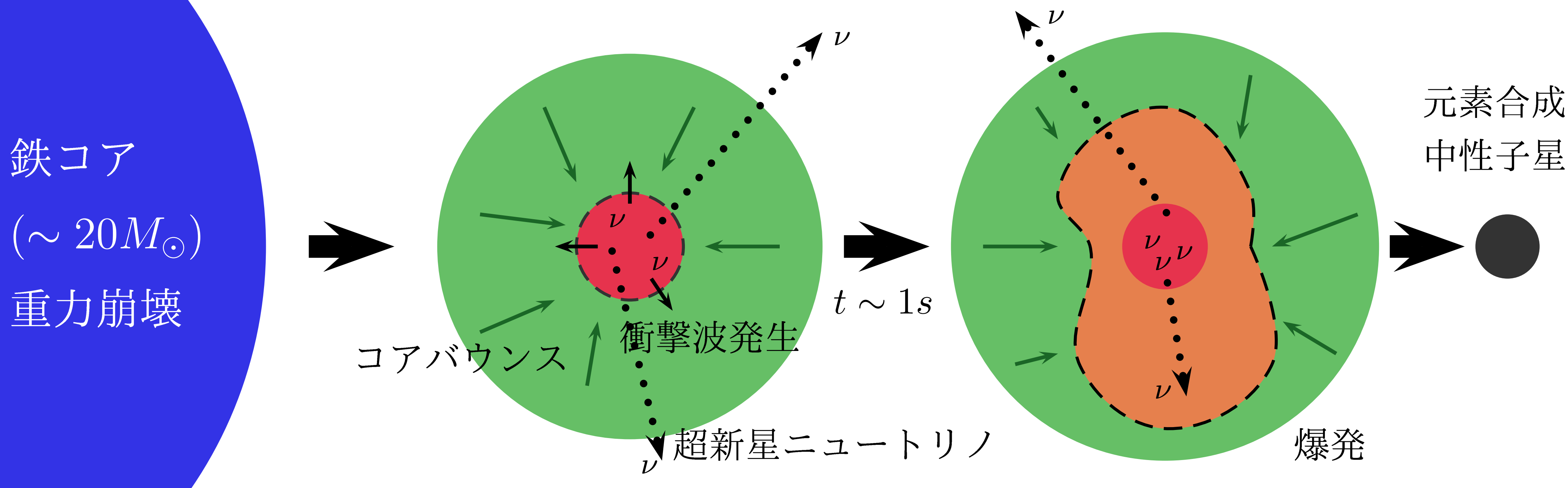
- Pulsar equation(パルサー磁気圏)

$$\left(1 - R^2\Omega_F^2\right)\left[\partial_R^2\Psi - \frac{1}{R}\partial_R\Psi + \partial_z^2\Psi\right] - 2R\Omega_F^2\partial_R\Psi + 16\pi^2 I_P\frac{\mathrm{d}I_P}{\mathrm{d}\Psi} = 0.$$

目次

導入

超新星の爆発メカニズムの検証



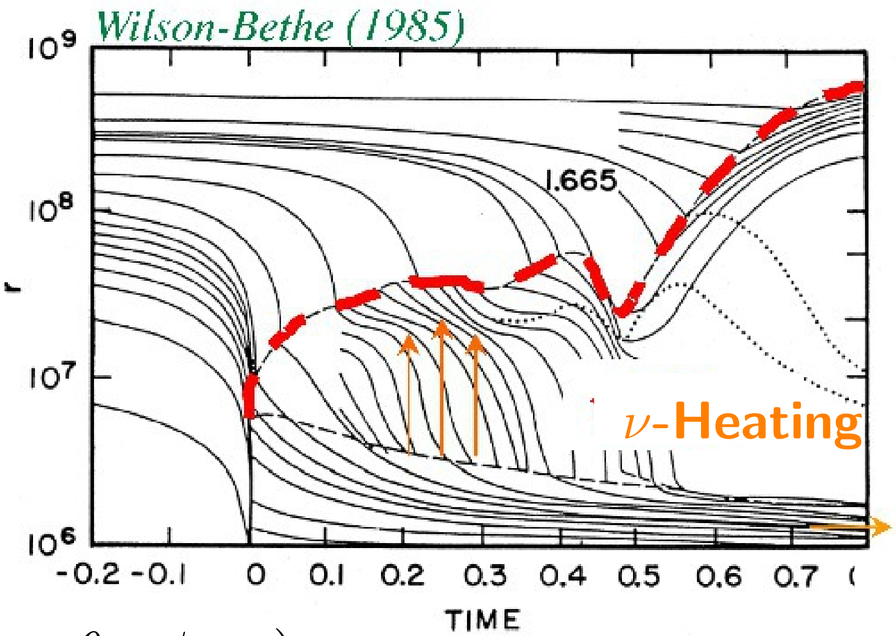
問題点：停滞した衝撃波を復活できるか？

ニュートリノ加熱メカニズム

輻射輸送を真面目に解く？→ (3+3+1 次元) ボルツマン方程式？

球対称シミュレーション

衝撃波位置



ニュートリノ加熱メカニズム？

1D-GR-Boltzmann では爆発せず。

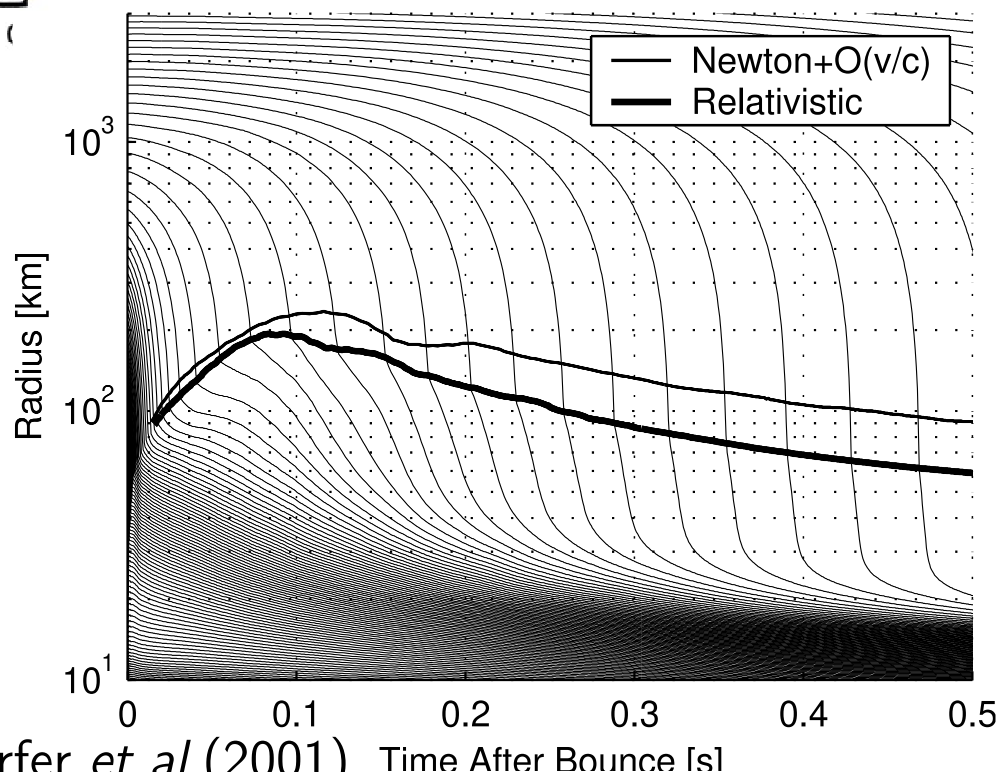
多次元効果？

$f_\nu\left(r,\theta,\phi,\epsilon_\nu,\theta_\nu,\phi_\nu;t\right)$

Boltzmann eq.:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_\nu}{\partial t}+\vec{n}\cdot\vec{\nabla}f_\nu=\frac{1}{c}\left(\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right)_{coll}$$

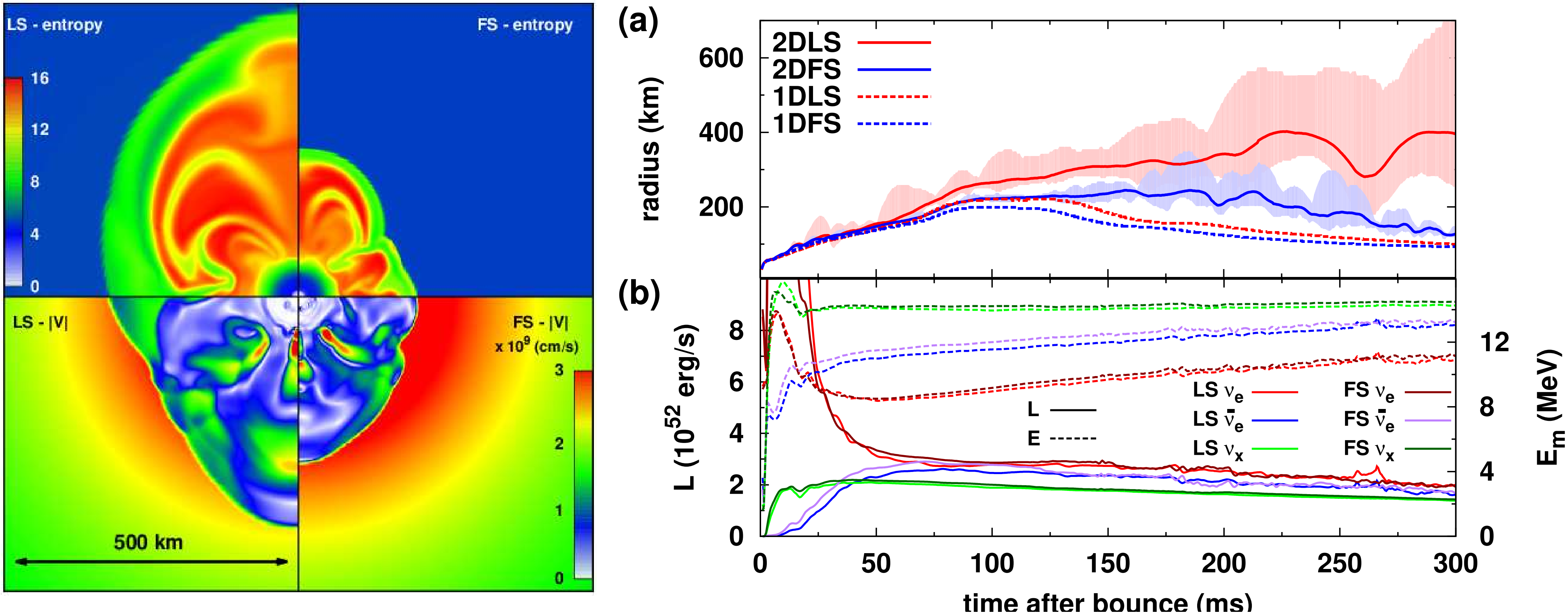
時間変動項＋移流項＝衝突項 (ν 反応)



Liebendörfer *et al.*(2001)

２次元軸対称ボルツマン計算での爆発例

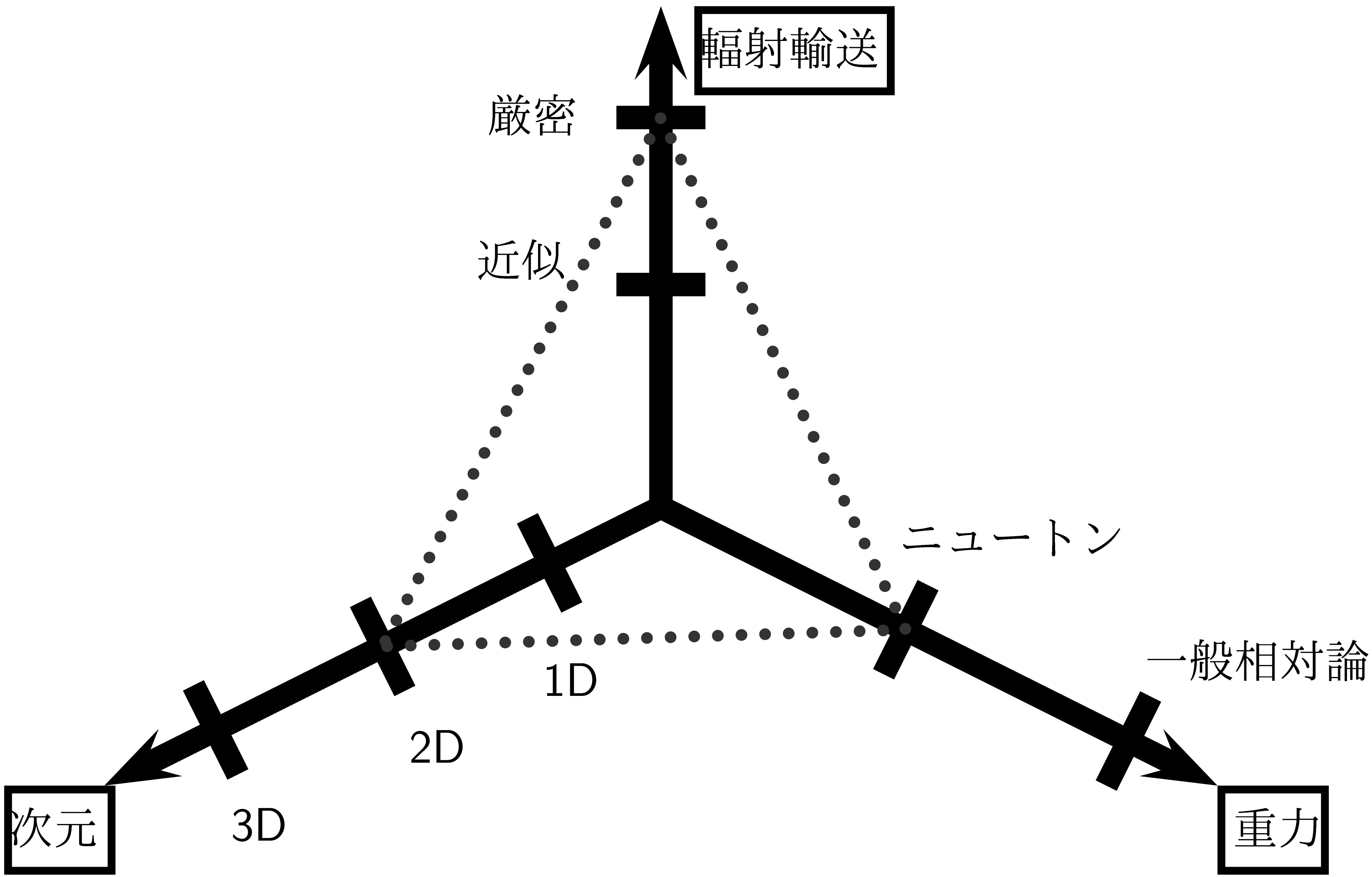
Nagakura *et al.*(2018)



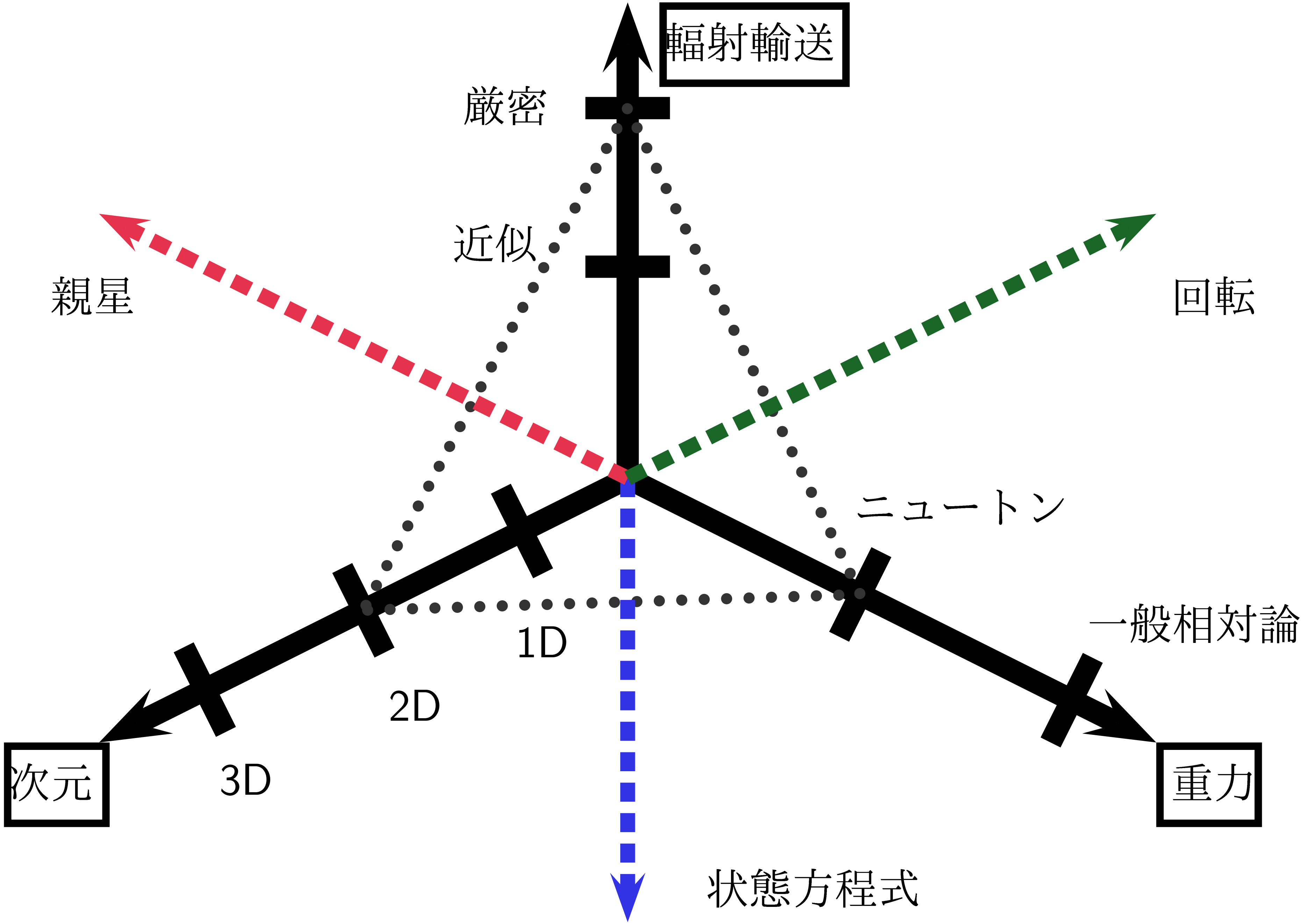
柔らかい状態方程式はより飛ぶ傾向

一次元球対称では爆発しない

問題設定の軸とモデル (パラメータ) 空間



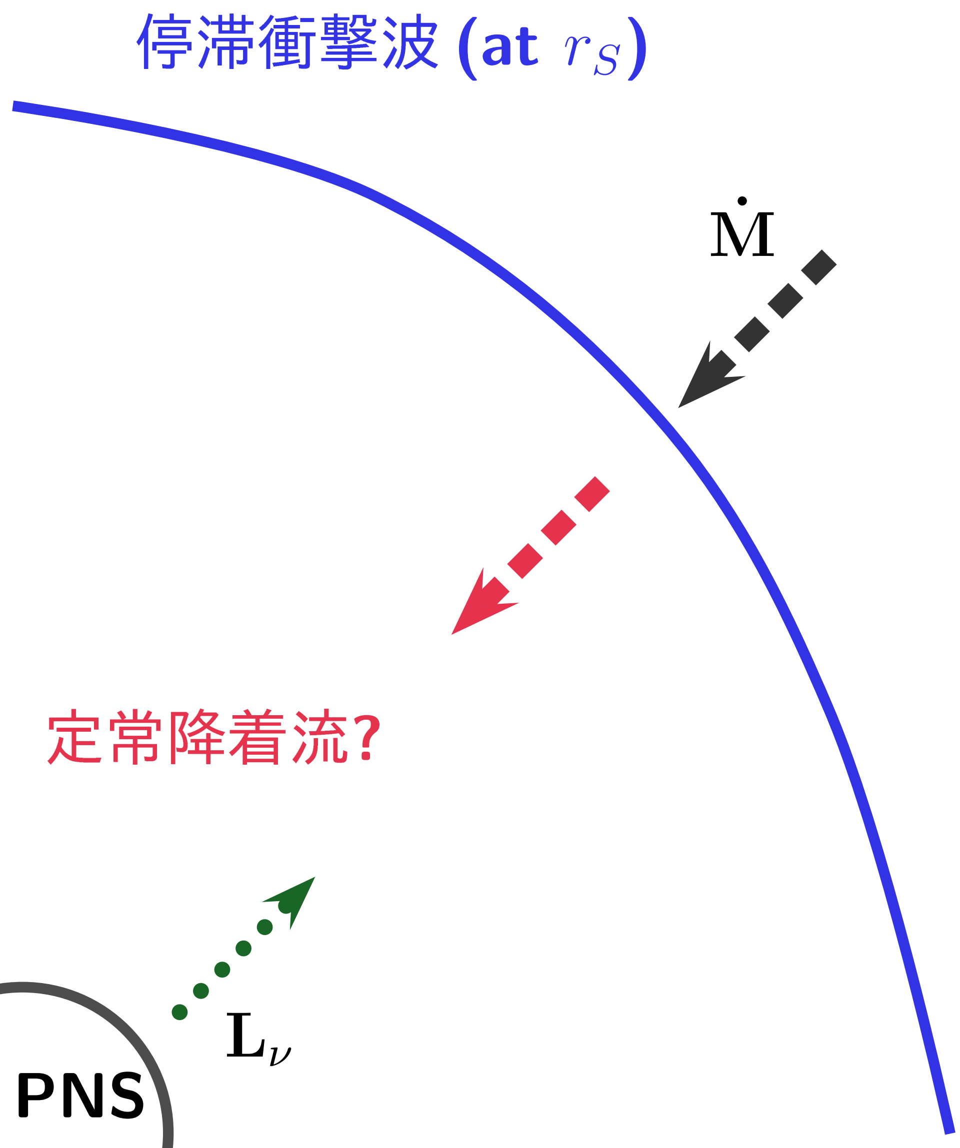
問題設定の軸とモデル (パラメータ) 空間

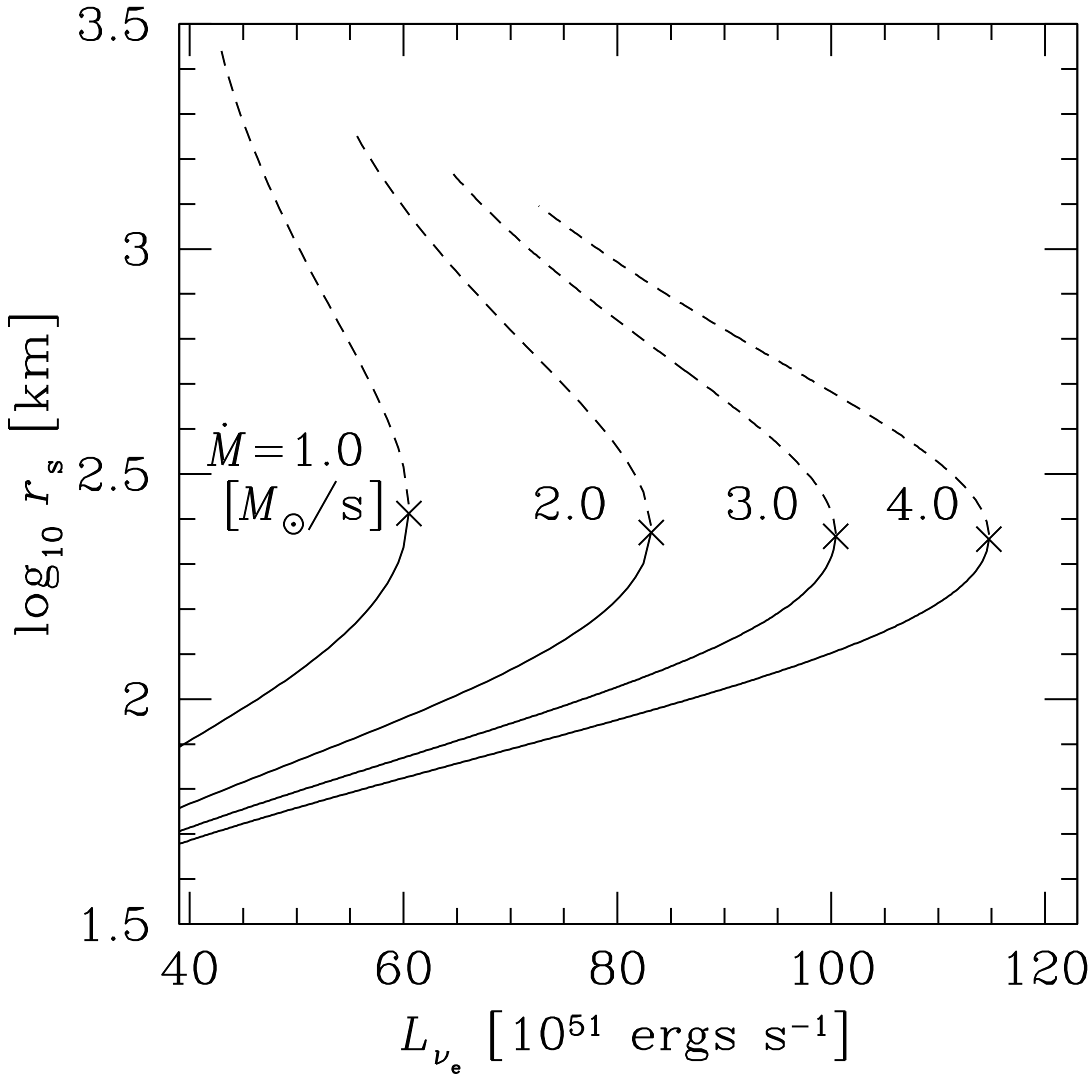


問題設定

超新星爆発と定常流

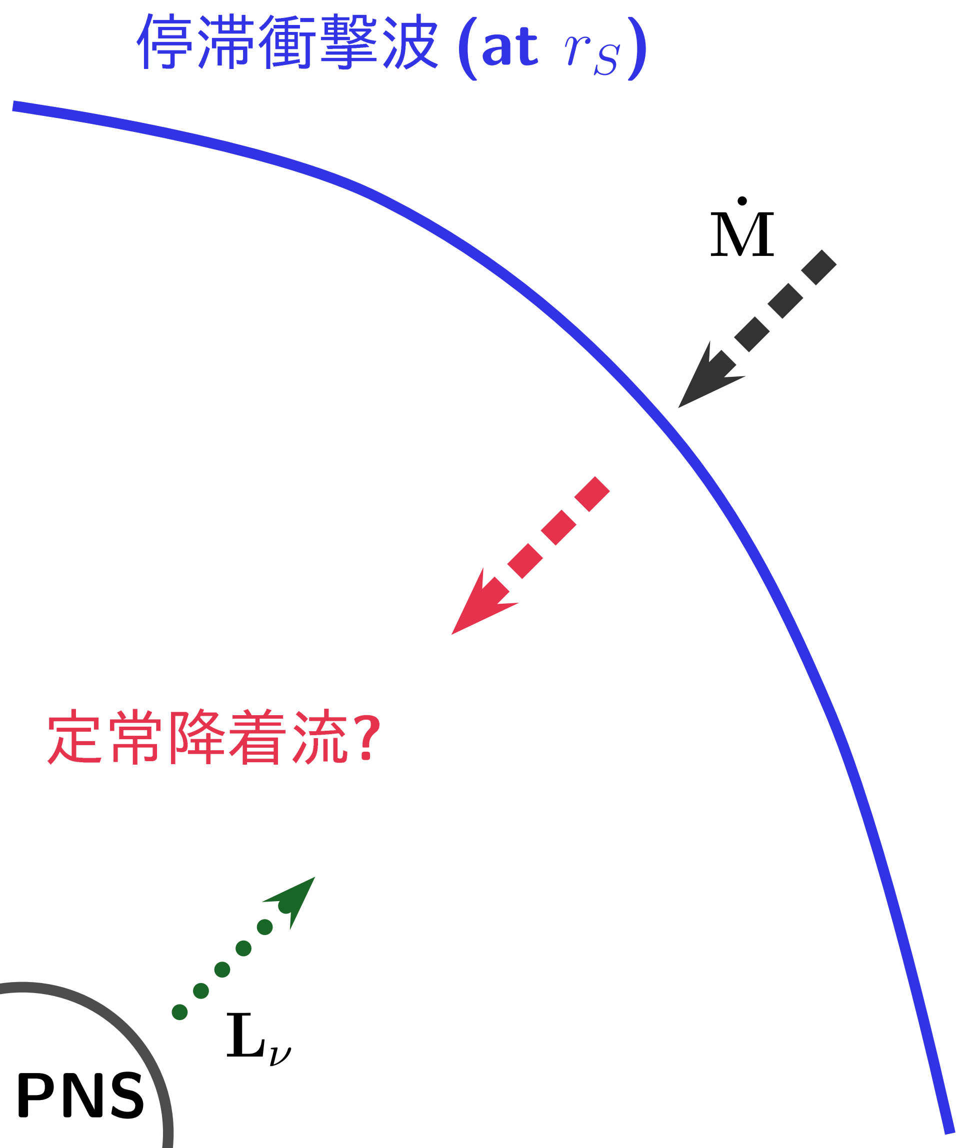
Yamasaki&Yamada('05)



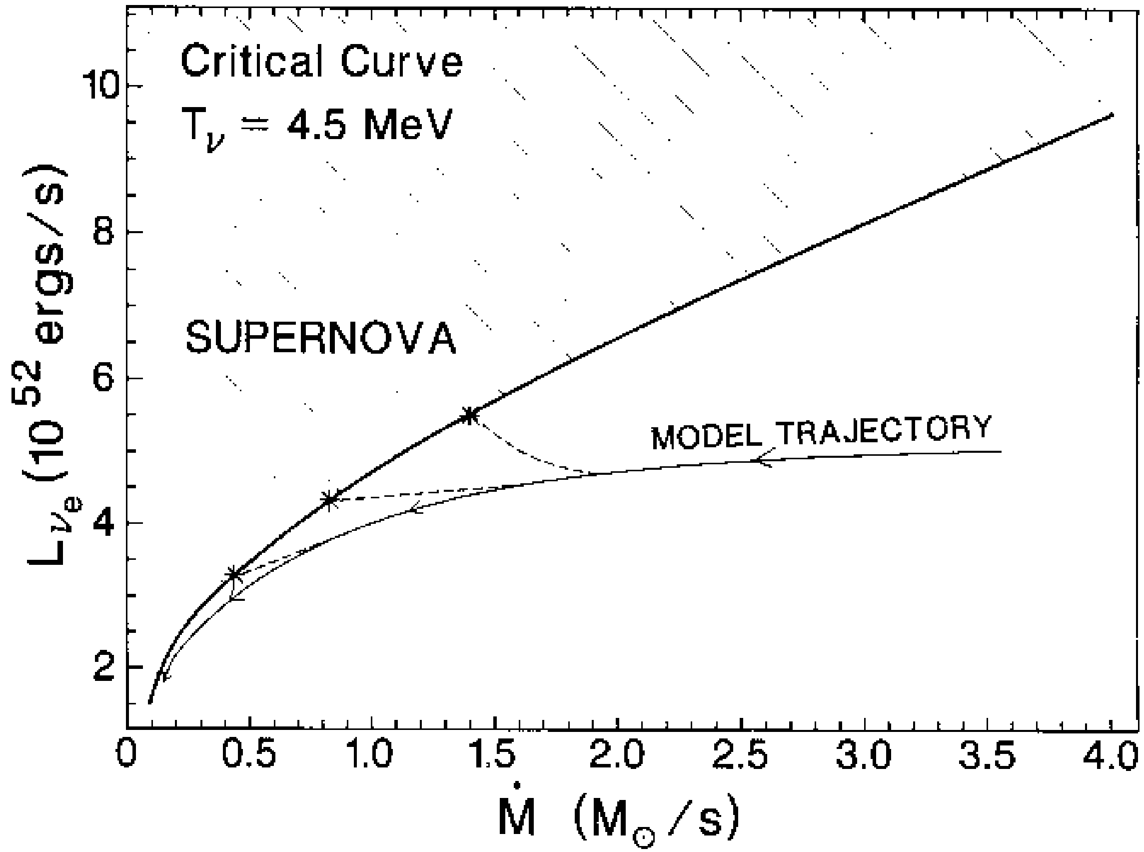


球対称流 (1D)

超新星爆発と定常流



Burrows&Goshy('93)



- 臨界ニュートリノ光度曲線が得られる。
- 多次元の効果は？
  (回転: Yamasaki&Yamada '05)

基礎方程式

$$D_t \equiv \partial_t - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$$

- Continuity

$$D_t \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u},$$

- EoM

$$D_t \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \Phi + \frac{1}{4\pi\rho} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \times \vec{B},$$

- Energy

$$D_t \varepsilon - \frac{P}{\rho^2} D_t \rho = \dot{q},$$

- Induction equation with MHD condition

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}.$$

基礎方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho u_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\rho u_\theta) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta^2+u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{GM}{r^2}-\frac{1}{4\pi\rho}\left[B_\theta\frac{\partial B_\theta}{\partial r}+B_\varphi\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+\frac{B_\theta^2+B_\varphi^2}{r}\right],\\
u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{u_\varphi^2\cot\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{4\pi\rho}\left[B_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r}-\frac{B_r}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}-\frac{B_\varphi}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta}+\frac{B_r B_\theta-B_\varphi^2\cot\theta}{r}\right],\\
u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{u_\varphi u_r}{r}+\frac{u_\theta u_\varphi\cot\theta}{r} &= \frac{1}{4\pi\rho}\left[B_r\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta}+\frac{B_r B_\varphi-B_\theta B_\varphi\cot\theta}{r}\right],
\end{aligned}$$

$$u_r\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}-\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)+\frac{u_\theta}{r}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}-\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right) = \dot q,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\theta) &= 0,\\
-u_\theta\frac{\partial B_r}{\partial\theta}+u_r\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}-B_r\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+B_\theta\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+u_r B_\theta\cot\theta-u_\theta B_r\cot\theta &= 0,\\
ru_\theta\frac{\partial B_r}{\partial r}-ru_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r}-rB_\theta\frac{\partial u_r}{\partial r}+rB_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+B_r u_\theta-B_\theta u_r &= 0,\\
rB_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-rB_\varphi\frac{\partial u_r}{\partial r}+ru_\varphi\frac{\partial B_r}{\partial r}-ru_r\frac{\partial B_\varphi}{\partial r}+B_\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-B_\varphi\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\varphi\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}-u_\theta\frac{\partial B_\varphi}{\partial\theta}+B_r u_\varphi-B_\varphi u_r &= 0,
\end{aligned}$$

$$p = \frac{11\pi^2}{180}\frac{k^4}{c^3\hbar^3}T^4+\frac{\rho kT}{m_N},\quad \varepsilon=\frac{11\pi^2}{60}\frac{k^4}{c^3\hbar^3}\frac{T^4}{\rho}+\frac{3}{2}\frac{kT}{m_N},$$

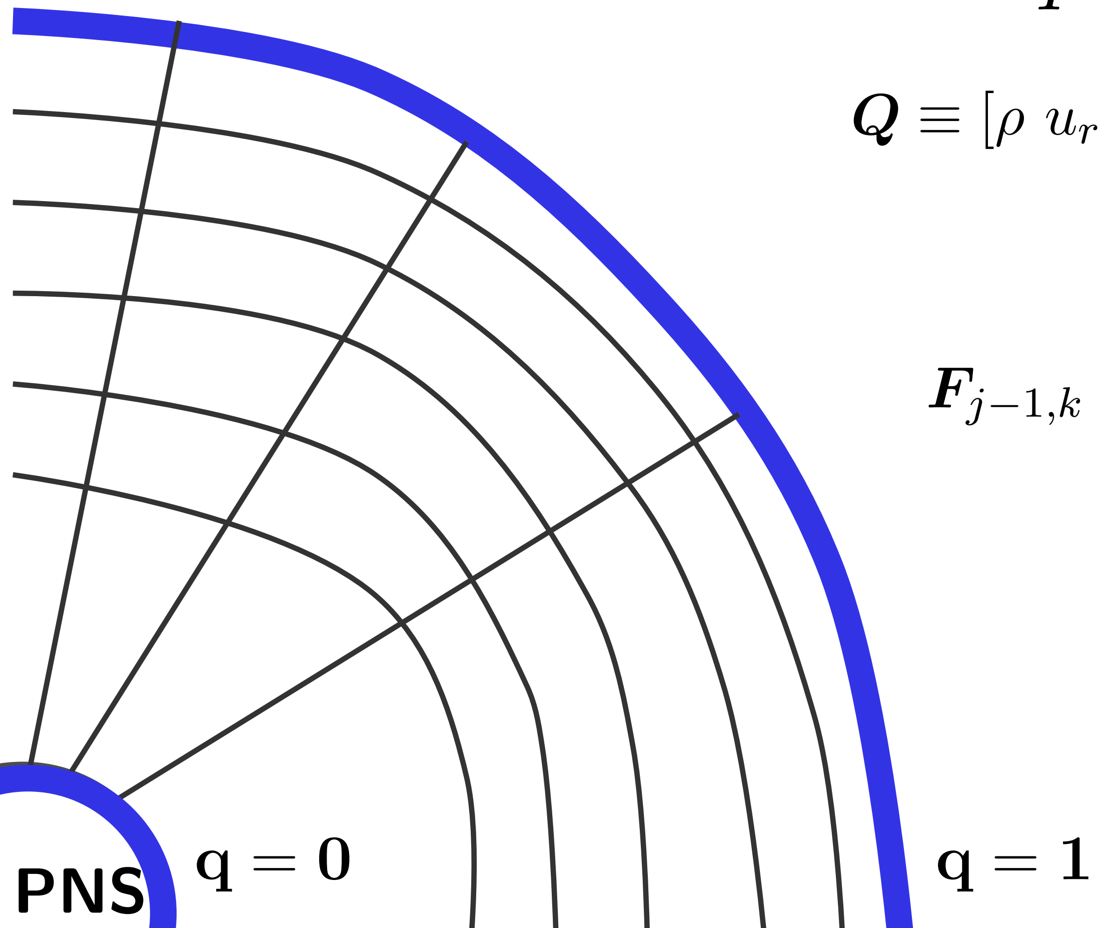
$$\dot q = 4.8\times10^{32}\left[1-\sqrt{1-\frac{r_\nu^2}{r^2}}\right]\frac{L_{\nu_e}}{2\pi r_\nu^2}T_\nu^2-2.0\times10^{18}T^6\quad(\mathrm{ergs\ s^{-1}\ g^{-1}}).$$

数値計算の設定

座標: $\left(q \equiv \frac{r - r_\nu}{r_s(\theta) - r_\nu}, \theta' \equiv \theta\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{r_s - r_\nu}\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta'} - \frac{q}{r_s - r_\nu}\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial Q}{\partial q}.$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{Q})\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial q} + \mathcal{B}(\boldsymbol{Q})\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \theta} + \mathcal{C}(\boldsymbol{Q}) = 0,$$

$$\boldsymbol{Q} \equiv [\rho\ u_r\ u_\theta\ u_\varphi\ T\ B_r\ B_\theta\ B_\varphi]^T,$$



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{j-1,k} \equiv\ & \mathcal{A}\left(\boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\boldsymbol{Q}_{j,k} - \boldsymbol{Q}_{j-1,k}}{q_j - q_{j-1}} \\
+\ & \mathcal{B}\left(\boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2},k}\right)\frac{\boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2},k+1} - \boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2},k-1}}{\Delta\theta} \\
+\ & \mathcal{C}\left(\boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2},k}\right) = 0.
\end{aligned}$$

数値計算手法

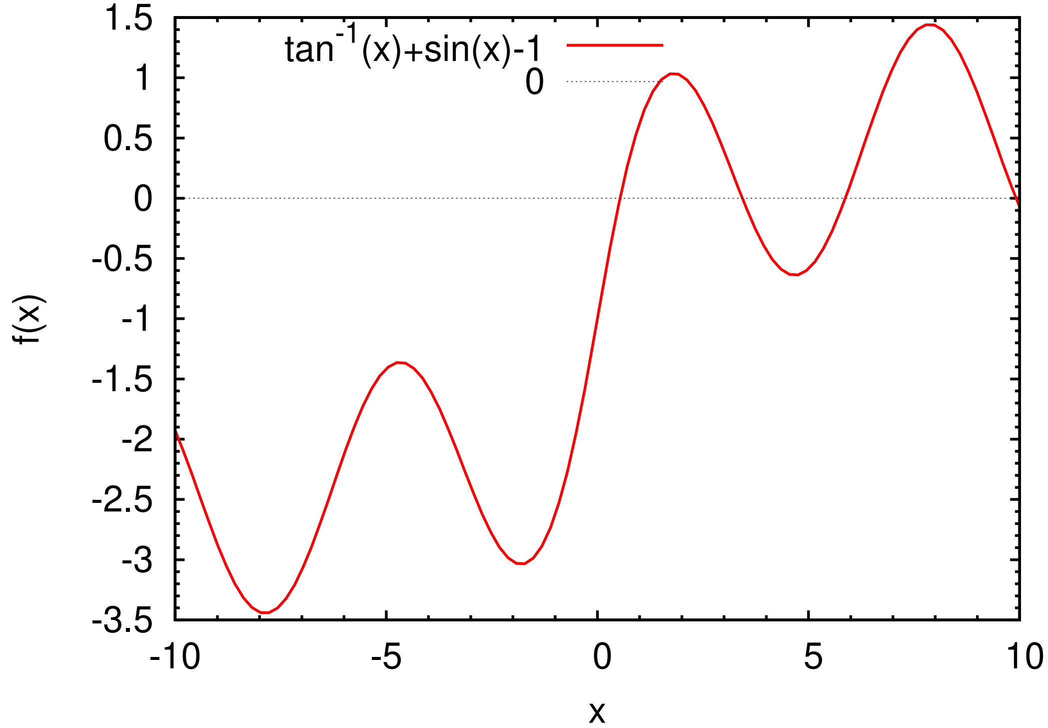
ニュートン・ラフソン法

(例)

$$f(x) \quad := \quad arctan(x) + sin(x) - 1 = 0$$

解まわりでテイラー展開 $x^* = x + \Delta x$

$$f(x + \Delta x) \sim f(x) + \Delta x f' + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$



$f(x + \Delta x) = 0$ を仮定すると、

$$\Delta x = -f(x)/f'.$$

次ステップの解は、より良いと期待。

$$x + \Delta x \equiv x^{n+1} = x^n - f/f'$$

非線形連立方程式の解法 I

(例) 円と 2 次曲線の交点を求める問題

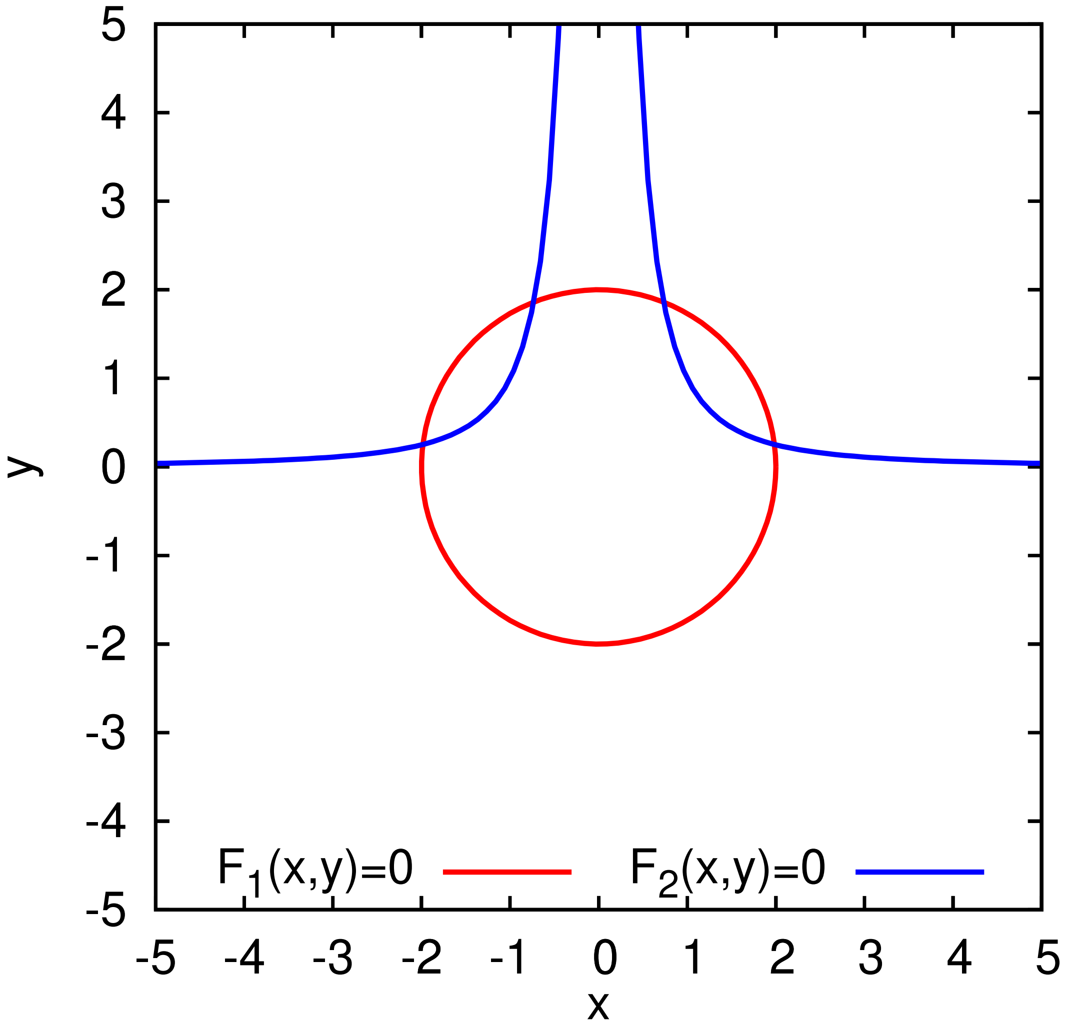
$$
\begin{aligned}
F_1(x,y) &:= x^2+y^2-4=0,\\
F_2(x,y) &:= x^2y-1=0.
\end{aligned}
$$

実質、Newton-Raphson 法だけ。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n - \Delta\tau J^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n),\\
\Longleftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} &= -J^{-1}\boldsymbol{F}.
\end{aligned}
$$

ヤコビアン:

$$
J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}
$$



非線形連立方程式の解法 I

(例) 円と 2 次曲線の交点を求める問題

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y) &:= x^2+y^2-4=0,\\
F_2(x,y) &:= x^2y-1=0.
\end{aligned}
$$

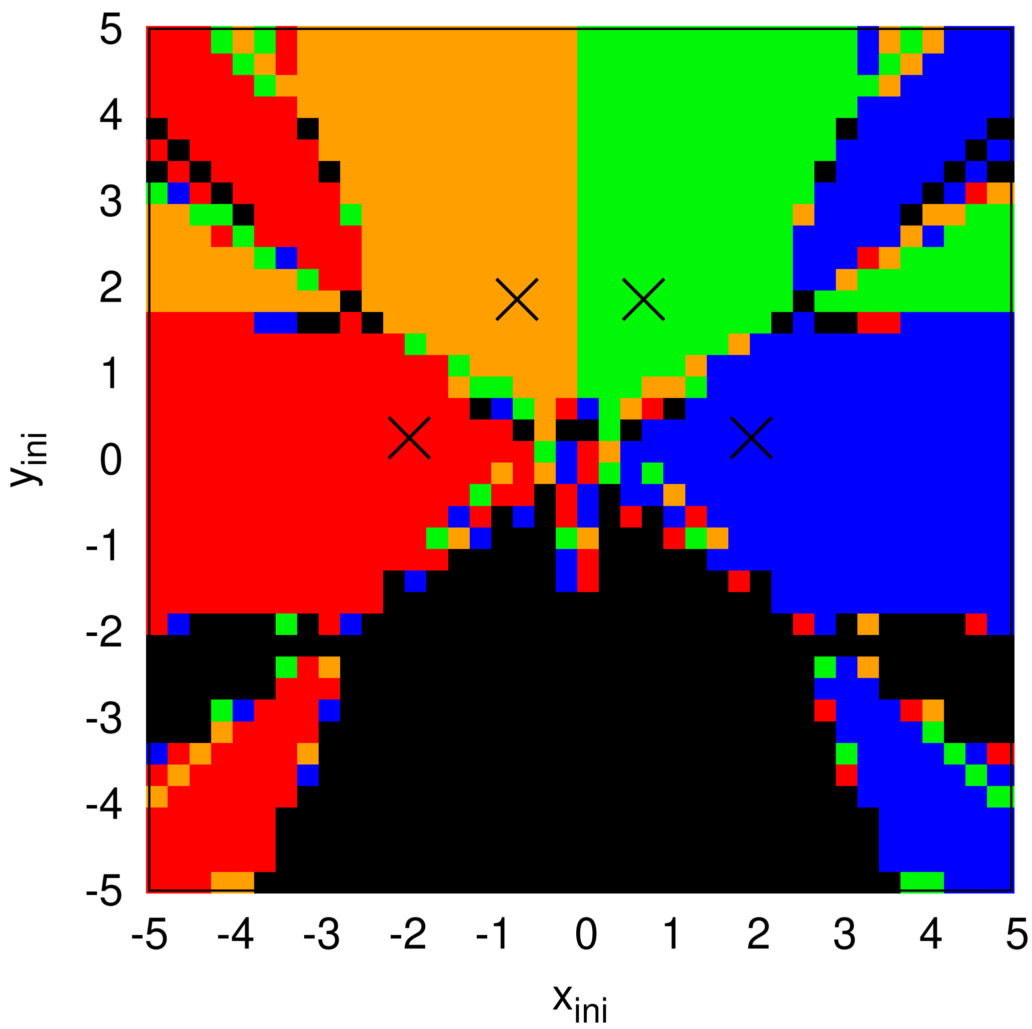
実質、Newton-Raphson 法だけ。

$$\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n-\Delta\tau J^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n),$$

$$\leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}=-J^{-1}\boldsymbol{F}.$$

ヤコビアン:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{bmatrix}$$



- 適当な Initial Guess から始めると 4 つの解 (色) に落ち着く。
- 解けない場合 (黒) もある。

- Initial Guess が極めて大事!!

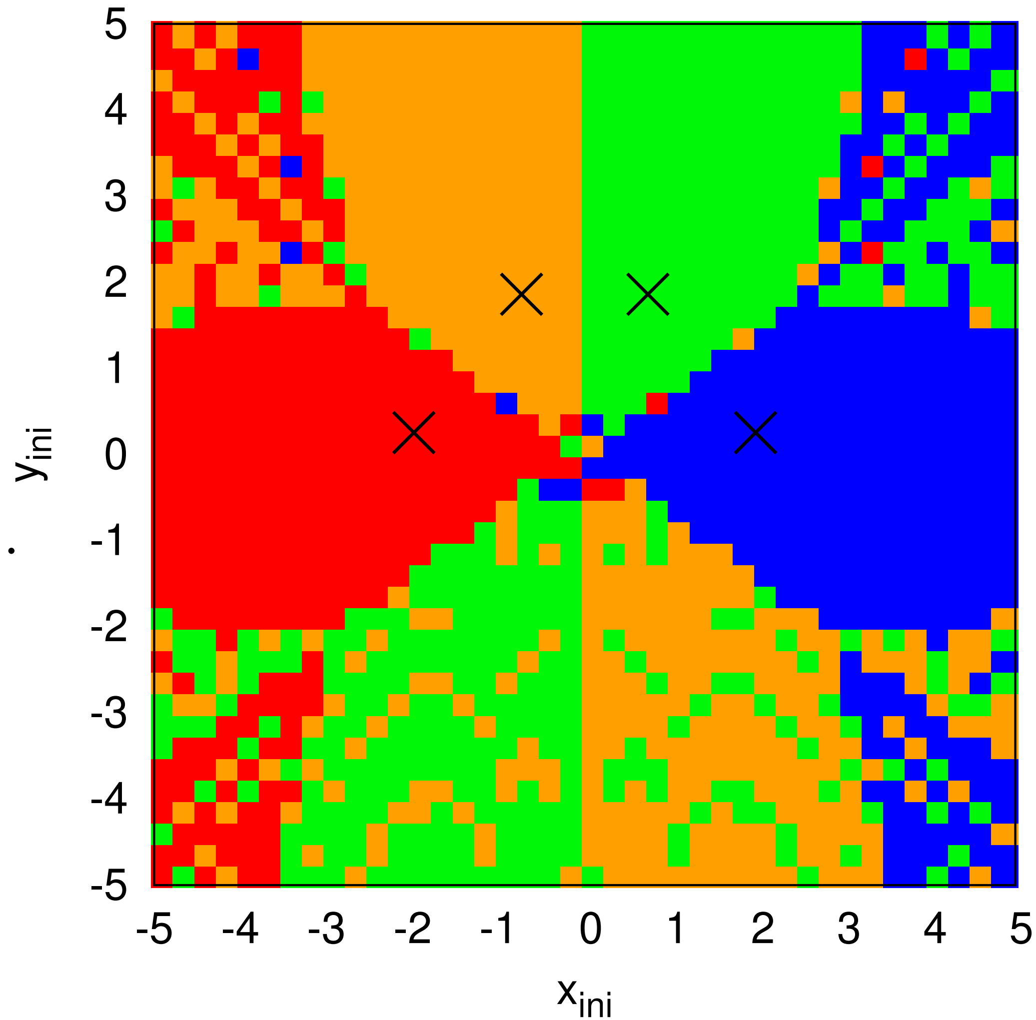
非線形連立方程式の解法 II

減衰振動子を思い浮かべて、2 階微分を足してみる。(W4 法, Okawa *et al.* '18)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{n+1} &= \boldsymbol{x}_n + \Delta\tau X \boldsymbol{p}_n, \\
\boldsymbol{p}_{n+1} &= (1 - 2\Delta\tau)\,\boldsymbol{p}_n - \Delta\tau Y \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n).
\end{aligned}
$$

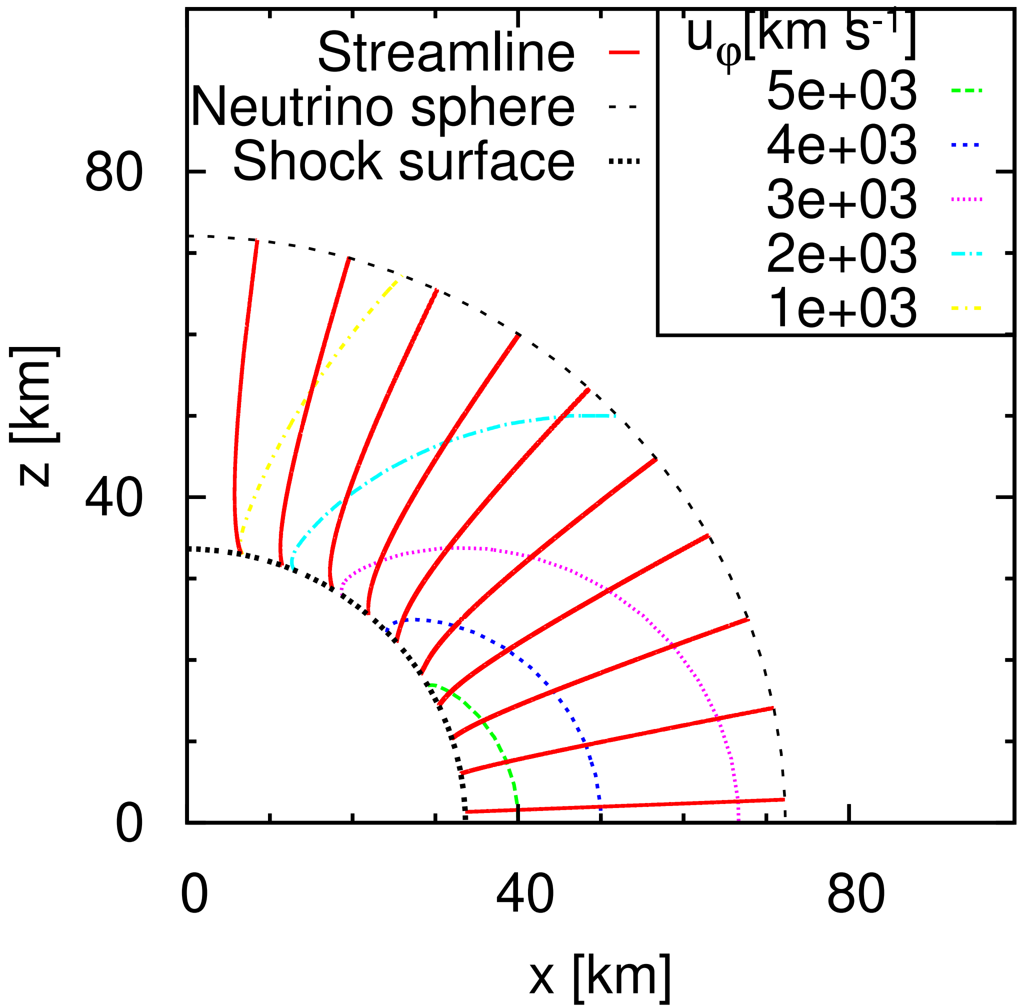
$$\Longleftrightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{x}} + 2\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{X}X^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} + XY\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}.$$

- $Y = X^{-1}J^{-1}$ と選ぶと、Newton-Raphson 法と同様に局所収束の性質がある。
- $J = UDL$ のように分解し、$Y = (UD)^{-1}$ とする。(W4UL 分解)

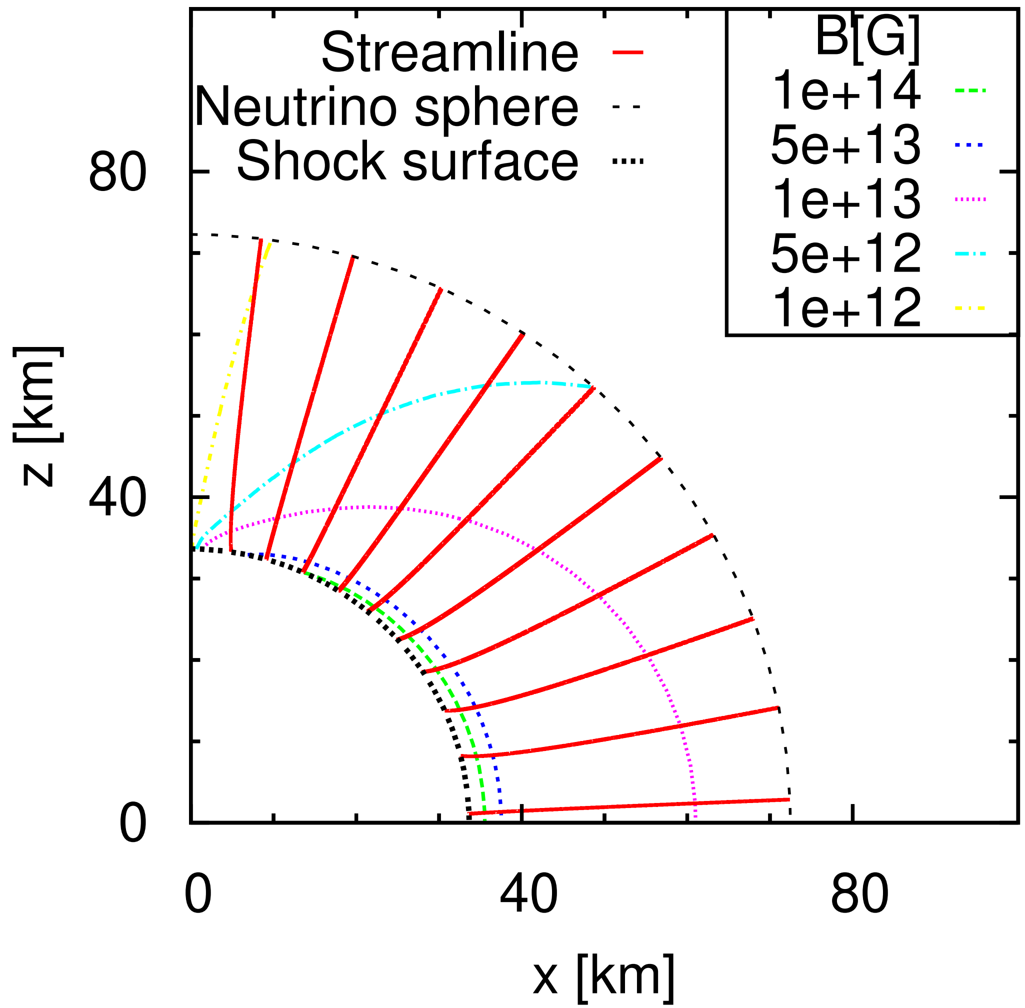


- 適当な Initial Guess から始めると 4 つの解 (色) に落ち着く。
- だいたい解ける!? 摩擦項による経路の変化。

解の例 (流線)

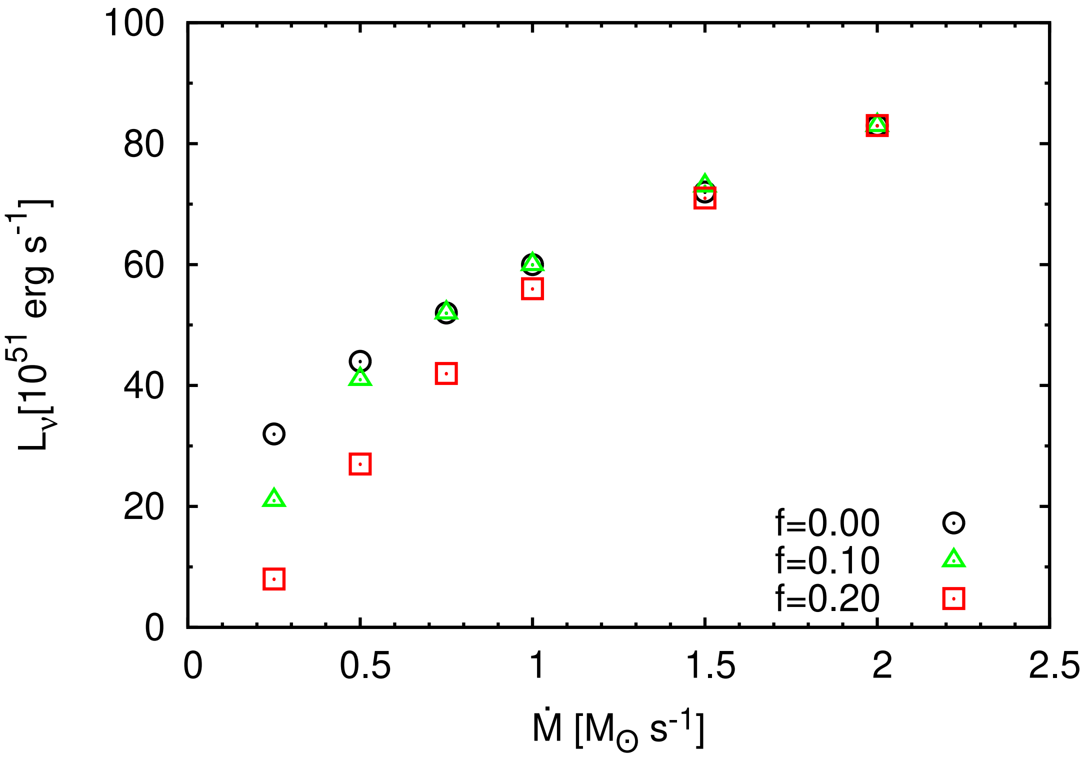


回転のみ
(赤道方向へ曲がる)

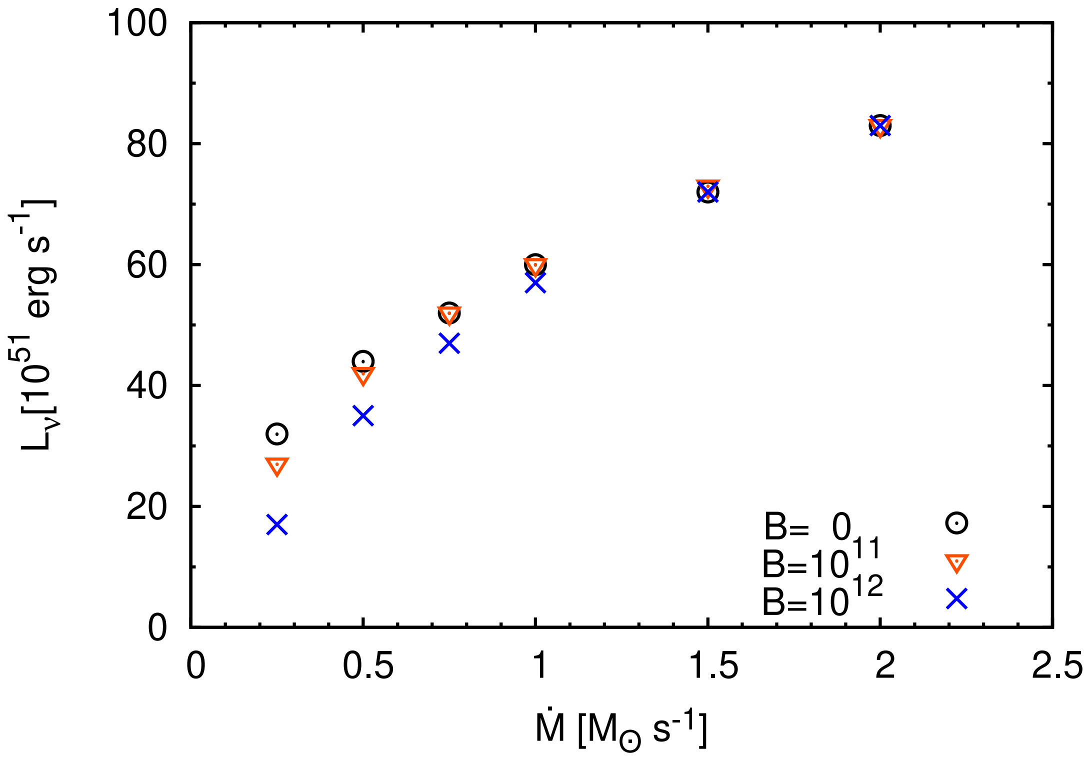


トロイダル磁場のみ
(極方向へ曲がる)

臨界ニュートリノ光度曲線



回転のみ



トロイダル磁場のみ

- 回転も磁場も臨界光度を下げる働きがある。
- 降着率に対する依存性は異なる。

応用例 (相対論的回転星)

Metric Ansatz :

$$ds^2 = -f_0^2(r,\theta)\mathrm{d}t^2 + f_1^{-2}(r,\theta)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2\right) + f_2^{-2}(r,\theta)r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi - \omega(r,\theta)\mathrm{d}t)^2$$

Velocity field of Perfect fluid :

$$u^t = \frac{1}{f_0(r,\theta)\sqrt{1-v^2}}, \quad u^\varphi = \frac{\Omega(r,\theta)}{f_0(r,\theta)\sqrt{1-v^2}},$$

where $v = (\Omega - \omega)\, r \sin\theta f_0^{-1} f_2^{-1}$.

Degrees of freedom :

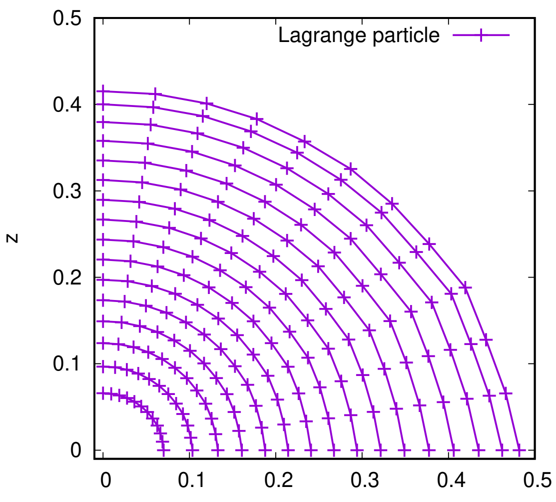
$$f_0(r,\theta), \quad f_1(r,\theta), \quad f_2(r,\theta), \quad \omega(r,\theta), \quad \rho(r,\theta) \quad \text{and} \quad P(r,\theta)$$

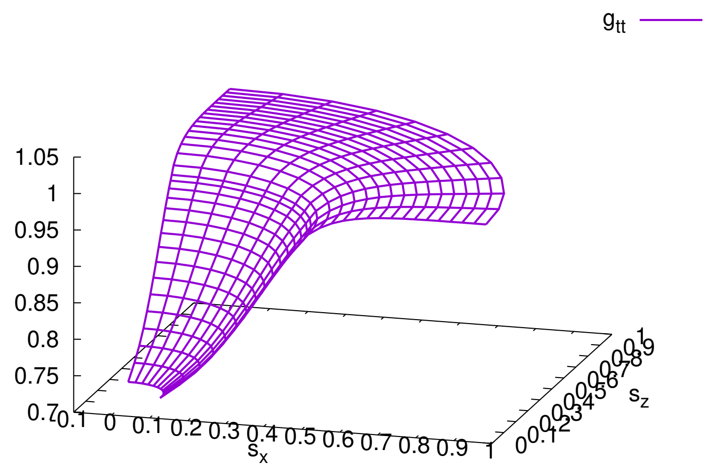
Equations : $E_{\mu\nu}(\equiv G_{\mu\nu} - \kappa_G T_{\mu\nu})$ Einstein eqs.$(E_{tt}, E_{rr}, E_{\theta\theta}, E_{t\varphi})$,
Conservation of $T_{\mu\nu}$ $(\nabla_\mu T^\mu_r, \nabla_\mu T^\mu_\theta)$ and EOS.

相対論的回転星 (Preliminary)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G_{00}} &= a_1^{(00)}\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + a_2^{(00)}\frac{\partial^2 f_0}{\partial \theta^2} + a_3^{(00)}\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + a_4^{(00)}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta^2} + a_5^{(00)}\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + a_6^{(00)}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} \\
&+ a_7^{(00)}\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + a_8^{(00)}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + a_9^{(00)}\frac{\partial f_0}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial r} + a_{10}^{(00)}\frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{\partial \omega}{\partial r} + a_{11}^{(00)}\frac{\partial f_0}{\partial \theta}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\
&+ a_{12}^{(00)}\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\frac{\partial \omega}{\partial \theta} + a_{13}^{(00)}\frac{\partial f_0}{\partial r} + a_{14}^{(00)}\frac{\partial f_1}{\partial r} + a_{15}^{(00)}\frac{\partial f_2}{\partial r} + a_{16}^{(00)}\frac{\partial \omega}{\partial r} \\
&+ a_{17}^{(00)}\frac{\partial f_1}{\partial \theta} + a_{18}^{(00)}\frac{\partial f_2}{\partial \theta} + a_{19}^{(00)}\frac{\partial \omega}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{T_{00}} = \frac{\rho f_0^4 f_2^4 + \rho\omega^2 r^4 \sin^4\theta\,(\Omega-\omega)^2 + f_0^2 f_2^2 r^2 \sin^2\theta\left(\Omega^2 P + 2\Omega\omega\rho - 2\omega^2\rho\right)}{f_0^2 f_2^4 + f_2^2 r^2 \sin^2\theta\,(\Omega-\omega)^2}
$$





まとめ

- 宇宙現象には非線形偏微分方程式で表されるものが多くある。
- 定常解を用いた解析も重要であるが、数値計算的に難しい(解けない) 場合が多い。
  - ニュートン・ラフソン法は初期値によって解が求まらない。W4 法を試す価値がある.
- **W4 法 (UL 分解) の数値計算コストは** $\mathcal{O}(N^3)$ **である。**
  - 問題に対する適切な分解を見つける (LH,ID)。並列化に適した分解を探す。
- 物理の様々な問題に適用できる可能性は十分ある。