

# Lightning Talk

## 「複素数の乗算で実数の乗算数を減らす方法」

2020/01/31

理研R-CCS

似鳥啓吾

# はじめに

- 一般に複素数同士の乗算に必要な実数の乗算は「4」
- 3回に減らせる

$$\begin{aligned}(X + iY)(x + iy) &= (Xx - Yy) + i(Xy + Yx) \\ &= (Xx + Xy - Xy - Yy) + i(Xy + Xx - Xx + Yx) \\ &= [(X - Y)y - X(x - y)] + i[(X + Y)x - X(x - y)]\end{aligned}$$

- Gaussの方法とも呼ばれる
- あまり有名ではないようだ
- あまり使われていない

# あまり使われていない

- 理由：加減算が増えて結局速くならない
- 最近のCPU：加減算、乗算、積和算がどれも1サイクルスルー  
プット
  - レイテンシの方は命令ごとに違うこともある
- 使われている例：複素行列乗算
  - 追加の加減算は $O(N^2)$ 、 $O(N^3)$ の方の係数が3/4になるのは馬鹿にならない
  - Intel MKL等でcgemm3、zgemm3といった名前を提供
- QCDの場合：3×3と3×2の行列積になってはいるがペイするか検討してみる

# 可能な式変形

For  $(X + iY)(x + iy) = (Xx - Yy) + i(Xy + Yx)$ ,

$$Xx - Yy = \begin{cases} Xx + Xy - Xy - Yy = \begin{cases} -(X + Y)y + X(x + y) \\ (X - Y)y + X(x - y) \end{cases} \\ Xx + Yx - Yx - Yy = \begin{cases} (X + Y)x - Y(x + y) \\ (X - Y)x + Y(x - y) \end{cases} \end{cases}$$

$$Xy + Yx = \begin{cases} Xy + Xx - Xx + Yx = \begin{cases} -(X - Y)x + X(x + y) \\ (X + Y)x - X(x - y) \end{cases} \\ Xy + Yy - Yy + Yx = \begin{cases} (X + Y)y + Y(x - y) \\ (X - Y)y + Y(x + y) \end{cases} \end{cases}$$

- 上の実部と下の虚部から共通項のあるものを任意に選ぶことができる（演算数は同じ）

# 必要な加減算とメモリ消費

- 左乗算オペランド
  - Re+Im, Re-Imに加えてRe or Imのいずれかを保持（2演算3語）
- 右乗算オペランド
  - Re, Imに加えてRe+Im or Re-Imを保持（1演算3語）
- 掛けた結果
  - Reのみに入る成分、Imのみに入る成分、共通項がある（2演算3語）

$$\begin{aligned}(X + iY)(x + iy) &= (Xx - Yy) + i(Xy + Yx) \\ &= (Xx + Xy - Xy - Yy) + i(Xy + Xx - Xx + Yx) \\ &= [(X - Y)y - X(x - y)] + i[(X + Y)x - X(x - y)]\end{aligned}$$

# 格子QCDの場合

- $y[3][2] += A[3][3] * x[3][2]$  のような計算
  - 18複素乗算、実数で72回の積和
  - 積和命令の数を18減らして54回にできる
  - 逆にいえば加減算が18回以上増えたらペイしない
- ゲージ場  $A[3][3]$ 
  - Re+ImとRe-Imを覚えておく（9加算9減算）
  - こちらの形式なら  $A^\dagger$  にも使える
  - 反復法なので覚えておいて使い回せるが、メモリフットプリントが1.5倍になってしまおうとなると微妙
- 入力スピノール  $x[3][2]$ 
  - ここには再利用性がまずない：Re+Imの6加算が毎回必要
- 出力スピノール  $y[3][2]$ 
  - ReとImの共通項への加算が12回必要、ただしこれは8方向からの寄与が全て求まってからでよいので1.5演算とも数えられる

# まとめ

- 複素数乗算の実数乗算数の削減手法を紹介した
  - Not new, not popular
  - 追加の加減算のオーバーヘッドがある
- QCDではAを最低2回使い回せばギリギリペイする
  - AとA<sup>†</sup>では厳しい？
  - 5次元ソルバーではどうでしょう？
- 専用計算機や命令スケジューリングについては議論しなかった
  - アキュムレータが12本では少なく24本では多いとき、18本にできる